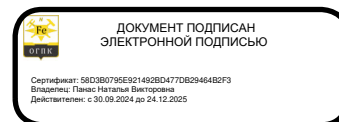


ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
«ОЛЕНЕГОРСКИЙ ГОРНОПРОМЫШЛЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ»



Обучающие материалы и
методические рекомендации по выполнению практических работ по
дисциплине «Математика» по разделу
«Линейная алгебра» для группы
21.02.15. «Открытые горные работы»

ТЕМА: Вычисление определителей.

ЦЕЛЬ: отработать навыки вычисления определителей путем разложения определителя по элементам некоторого ряда (теорема Лапласа), по правилу треугольника (правило Сарруса), с помощью электронных таблиц Excel.

1. Разложение определителя по элементам некоторого ряда.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n-1$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} .
Обозначается M_{ij}

Пример. Найти миноры M_{11} ; M_{12} определителя Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -10$$

Ответ: $M_{11} = -5$; $M_{12} = -10$.

Определение

Алгебраическим дополнением называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ - четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример. Найти алгебраические дополнения A_{11} A_{12}

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

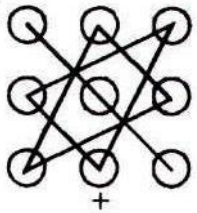
Ответ: $A_{11} = -5$; $A_{12} = 10$.

Чтобы вычислить определитель путем разложения его по элементам некоторого ряда надо найти сумму произведений элементов этого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

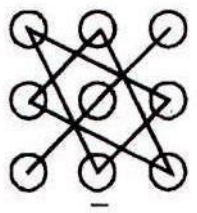
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & & \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \quad (\text{разложение по элементам строки})$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{12} + a_{31} A_{31} \quad (\text{разложение по элементам столбца})$$

2.Вычисление определителей по правилу треугольника (по правилу Сарруса). Правило Сарруса



$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

Пример. Вычислите определитель по правилу треугольника (по правилу Сарруса).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 0 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Ответ: 6

3. Вычисление определителей с помощью программы Microsoft Excel.

Задание 1

Вычислить определитель с помощью электронных таблиц Excel

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

Решение

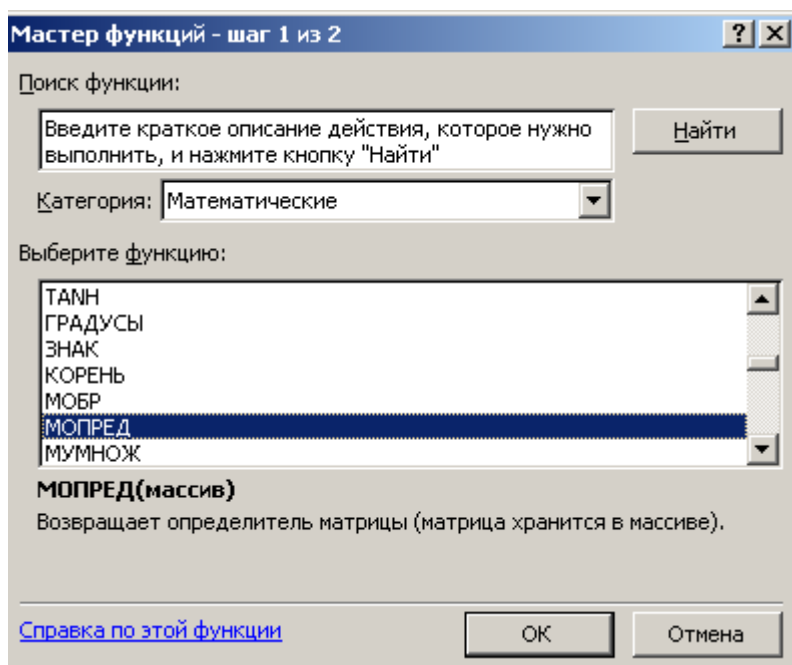
а) Введите в диапазон ячеек **A1: C3** элементы определителя Δ

	A	B	C
1	-4	2	3
2	0	8	-2
3	1	6	-7

б) Выделите любую ячейку для ответа, например **D4**.

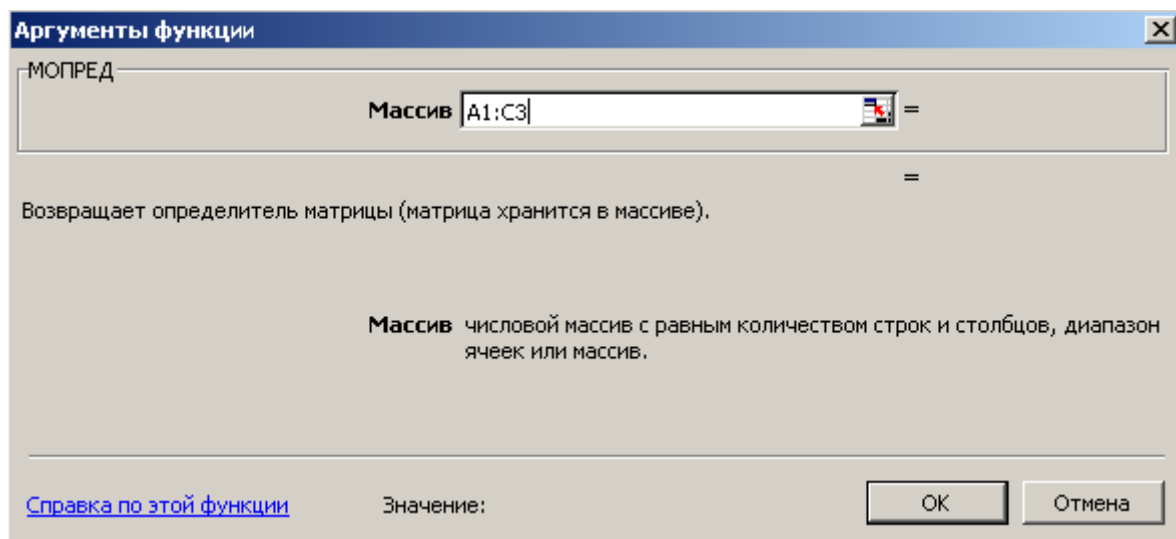
в) Нажмите на панели инструментов **Стандартная** кнопку f_x

г) В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** в рабочем поле **Категория** выберите - **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**, а в рабочем поле функция – имя функции - **МОПРЕД**. После этого щелкните по кнопке ОК.



Появившееся диалоговое окно мышью отодвиньте в сторону от определителя.

е) В диалоговом окне **Массив** введите область определителя **A1: C3** , выделив определитель.



ж) Щелкните по кнопке ОК.

В результате в ячейке **D4** появится ответ 148

После завершения практической работы сделать вывод о результатах.

Историческая справка

Пьер Симон Лаплас (1749 — 1827) - французский астроном, математик и физик. Научное наследие Лапласа относится к области небесной механики, математики и математической физики.

Фундаментальными являются работы Лапласа по дифференциальным уравнениям, в частности по интегрированию методом «каскадов» уравнений с частными производными. Введенные Лапласом *шаровые функции* имеют разнообразные применения. В линейной алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о разложении определителя по элементам некоторого ряда.

Для разработки, созданной Лапласом математической теории вероятностей, он ввёл так называемые *производящие функции* и широко применял преобразование, носящее его имя.

Теория вероятностей являлась основой для изучения всевозможных статистических закономерностей, в особенности в области естествознания.

ТЕМА: Операции над матрицами. Транспонирование матриц. Обратные матрицы.

ЦЕЛЬ: отработать навыки выполнения операций над матрицами, транспонирования матриц, нахождения обратных матриц вручную и с помощью электронных таблиц Excel.

1. Операции над матрицами

Сложение матриц

Суммой двух матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Записывают $C = A + B$

Аналогично определяется разность матриц.

Умножение матрицы на число

Умножением матрицы $A_{m \times n}$ на число k называется матрица $B_{m \times n}$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$. Записывают $B = k \cdot A$

Задание

Выполнить линейную комбинацию: $c \cdot A + k \cdot B$,

если: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, $C, k - const$.

Алгоритм выполнения задания

1. Найдем $c \cdot A$ и $k \cdot B$:

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & c \cdot a_{13} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & c \cdot a_{23} \end{pmatrix} \quad k \cdot B = \begin{pmatrix} k \cdot b_{11} & k \cdot b_{12} & k \cdot b_{13} \\ k \cdot b_{21} & k \cdot b_{22} & k \cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

2. Выполним линейную комбинацию:

$$c \cdot A + k \cdot B = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} + kb_{11} & ca_{12} + kb_{12} & ca_{13} + kb_{13} \\ ca_{21} + kb_{21} & ca_{22} + kb_{22} & ca_{23} + kb_{23} \end{pmatrix}$$

Пример

Выполнить линейную комбинацию $2A + 4B$, если: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

1. $2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; $4B = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 & 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$2. \ 2A + 4B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 & 8+4 \\ 6+0 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{Ответ: } 2A + 4B = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Произведение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$ такая, что $c_{ij} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, т.е. элемент i -й строки и k -го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц в программе Microsoft Excel

Выполнить умножение матриц A и B : $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 11 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

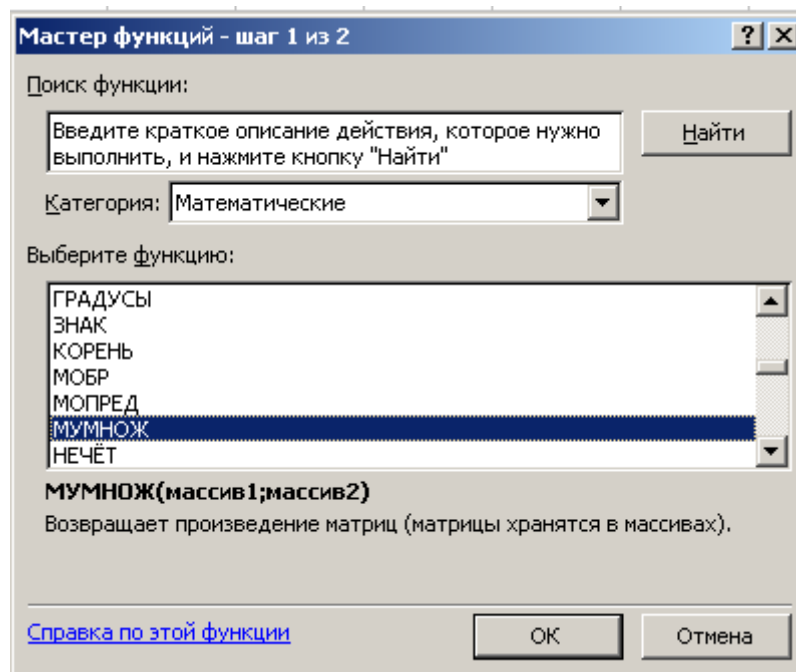
Алгоритм выполнения задания

1. Введите элементы первой матрицы в диапазон ячеек **A1:C3**.
2. Введите элементы второй матрицы в диапазон ячеек **E1:G3**.

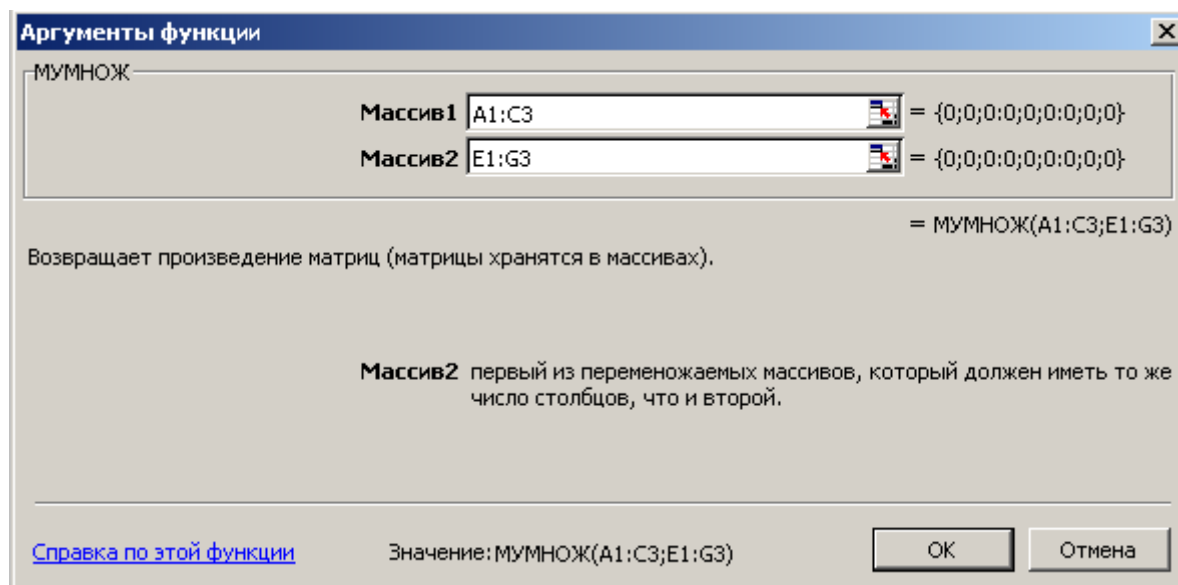
	A	B	C	D	E	F	G
1	1	-8	2		4	8	-2
2	0	4	3		1	2	7
3	-2	5	7		11	0	3

3. Выделите ячейки, в которых будет содержаться матрица, являющаяся результатом произведения этих матриц, например **A5:C7**.
4. Воспользуйтесь Мастером функций f_x .
5. В рабочем поле **Категория** выберите - **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**.

6. В рабочем поле **Функция** – имя функции - **МУМНОЖ**. После этого щелкните по кнопке ОК.



7. В окне **Массив 1** выберите область первой матрицы **A1:C3**, выделив ее массив. В окне **Массив 2** выберите область второй матрицы **E1:G3**, выделив ее массив.



8. Одновременно нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш **CTRL + SHIFT + OK**.

Результатом будет матрица, содержащаяся в ячейках **A5:C7**.

	A	B	C
5	18	-8	-52
6	37	8	37
7	63	-6	60

2. Транспонирование матриц

Определение

Транспонированной называется матрица $(A)^T$, в которой столбцы исходной матрицы (A) заменяются строками с соответствующими номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц в программе Microsoft Excel

Для осуществления транспонирования в программе Microsoft Excel используется функция **ТРАНСП**, которая позволяет поменять операцию массива на рабочем листе с вертикальной на горизонтальную и наоборот.

Задание

Найти матрицу, транспонированную к данной, с помощью программы

MS. Excel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Алгоритм выполнения задания

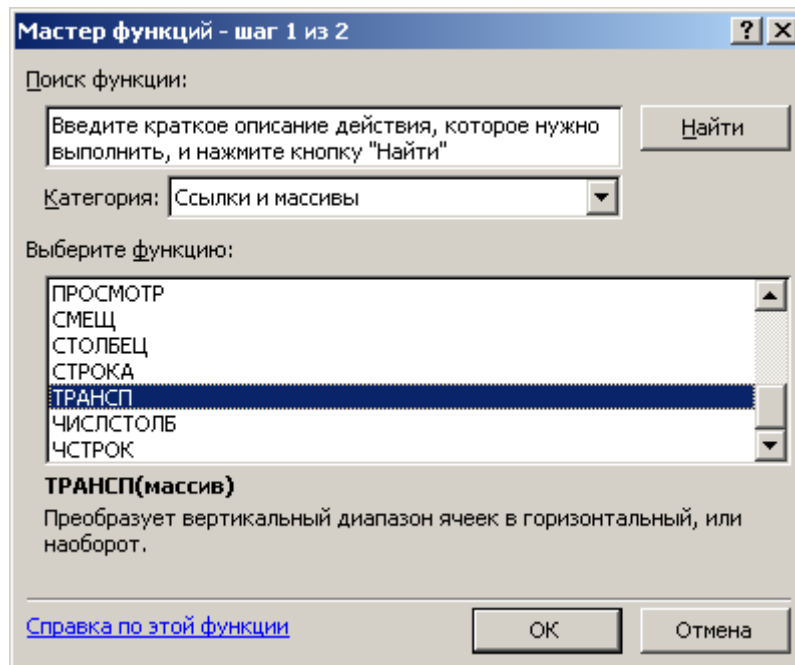
1. Введите в диапазон ячеек A1:C3 матрицу размером 3×3.

	A	B	C
1	1	3	0
2	2	5	4
3	4	1	2

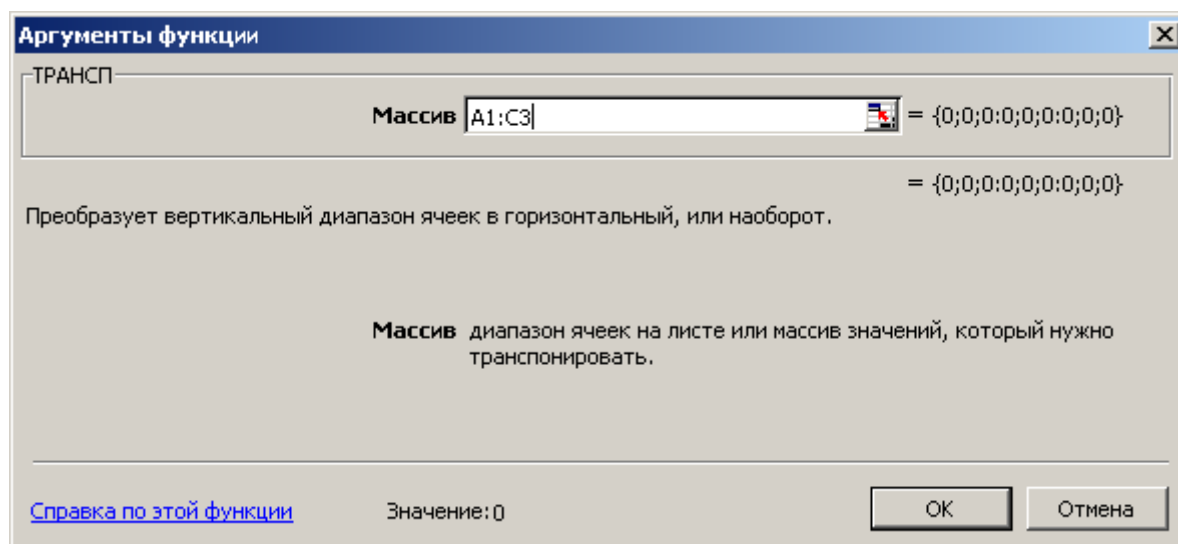
2. Выделите блок ячеек под транспонированную матрицу (3×3). Например, **A5:C7**.

3. Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку f_x (мастер функций).

4. В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле **Категория**, выберите **Ссылки и МАССИВЫ**, а в рабочем поле функция – имя функции **ТРАНСП**. После этого щелкните по кнопке **OK**.



5. Появившееся диалоговое окно **ТРАНСП** мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы **A1:C3**.



6. Введите массив **A1:C3**, выделив его.

7. Нажмите сочетание клавиш **CTRL + SHIFT + OK**.

В результате в диапазоне **A5:C7** появится транспонированная матрица:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.Обратные матрицы

Определение

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A , если выполняется условие

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

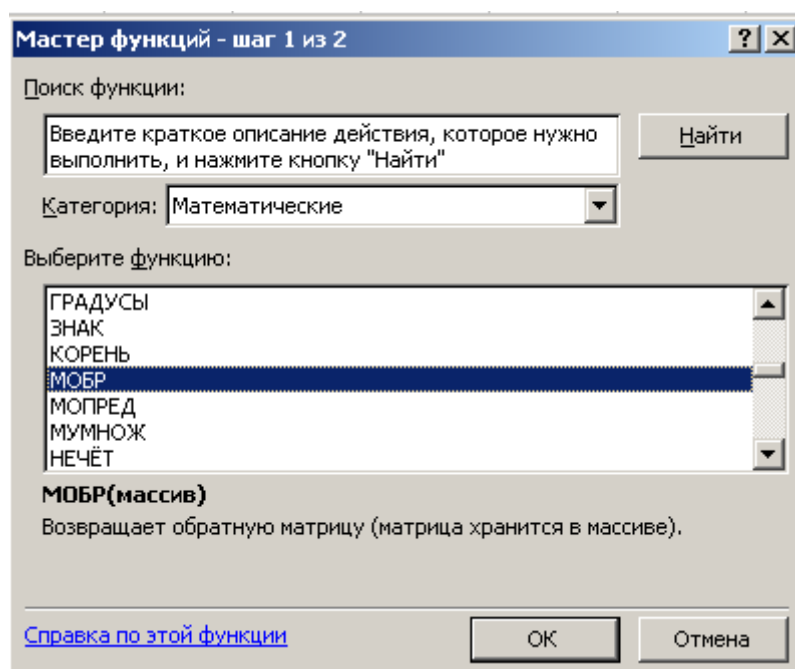
Нахождение матрицы, обратной данной, с помощью программы

Microsoft Excel

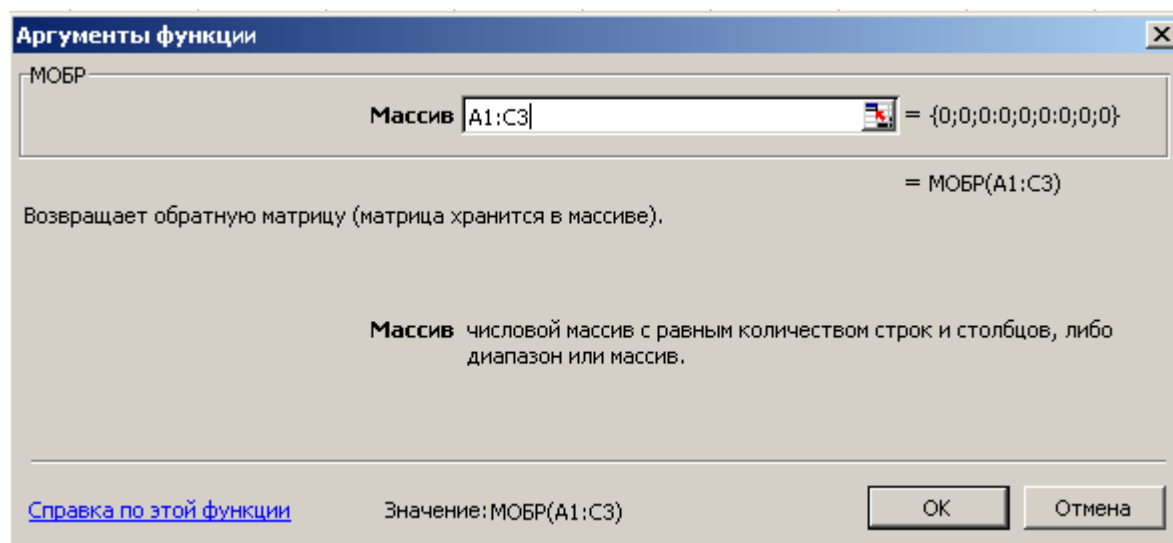
Найти матрицу A^{-1} , обратную A , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Алгоритм выполнения задания

1. Введите элементы матрицы A в диапазон ячеек **A1: C3**.
2. Выделите блок ячеек под обратную матрицу, например, блок ячеек **A5:C7** (указателем мыши при нажатой левой кнопке).
3. . Воспользуйтесь Мастером функций f_x . В появившемся диалоговом окне в рабочем поле **КАТЕГОРИЯ** выберите - **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**, а в рабочем поле функция – имя функции - **МОБР**. Щелкните по кнопке **ОК**.



4. Появившееся диалоговое окно **МОБР** мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы, и введите диапазон исходной матрицы **A1: C3** в рабочем поле **МАССИВ**.



5. Нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.

6. Если обратная матрица не появилась в диапазоне **A5:C7**, то следует щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие **CTRL+SHIFT+ENTER**.

В результате в диапазоне A5:C7 появится обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ -0,33333 & 0,33333 & 0,33333 \end{pmatrix}$$

После завершения практической работы сделать вывод о результатах.

ТЕМА: Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

ЦЕЛЬ: Отработать навыки решения систем линейных уравнений методом Крамера, используя теорему Лапласа, правило Сарруса и программу Microsoft Excel.

Задание 1

Решить систему линейных уравнений методом Крамера, используя теорему Лапласа. Выполнить проверку, пользуясь электронными таблицами Excel.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Алгоритм выполнения задания

1. Вычислить главный определитель Δ по теореме Лапласа (разложение определителя по строке или столбцу).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

2. Вычислить все вспомогательные определители, пользуясь теоремой Лапласа:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

1. Найти x ; y ; z по формулам Крамера.

Формулы Крамера

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

4. Записать ответ: $(x; y; z)$.

Задание 2

Решить систему линейных уравнений методом Крамера, используя правило Сарруса. Выполнить проверку, пользуясь программой MS. Excel.

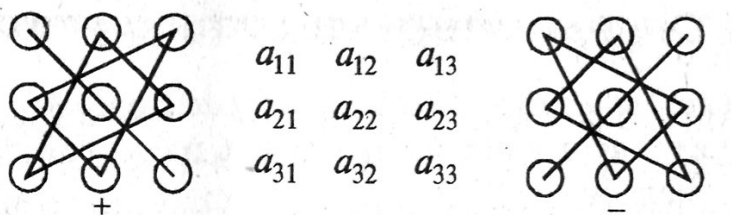
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Алгоритм выполнения задания

Формулы Крамера $x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

1. Вычислить главный определитель Δ , пользуясь правилом Сарруса.

Правило Сарруса



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

2. Вычислить вспомогательные определители Δx ; Δy ; Δz пользуясь правилом Сарруса.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Найти x ; y ; z по формулам Крамера.

4. Записать ответ: $(x; y; z)$.

Задание 3

Решить систему линейных уравнений, пользуясь программой MS. Excel при вычислении определителей.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

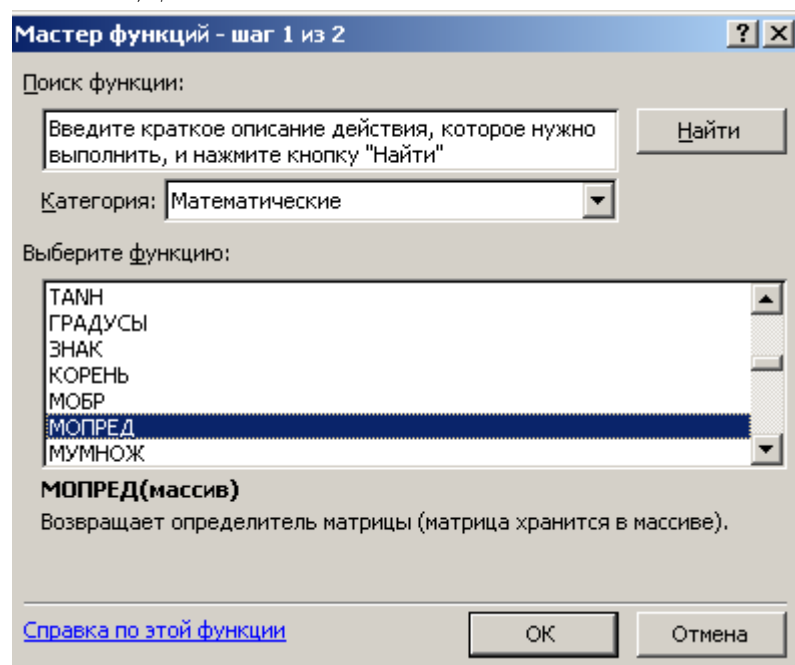
Алгоритм выполнения задания

1. Вычислим главный определитель Δ с помощью программы Ms. Excel.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

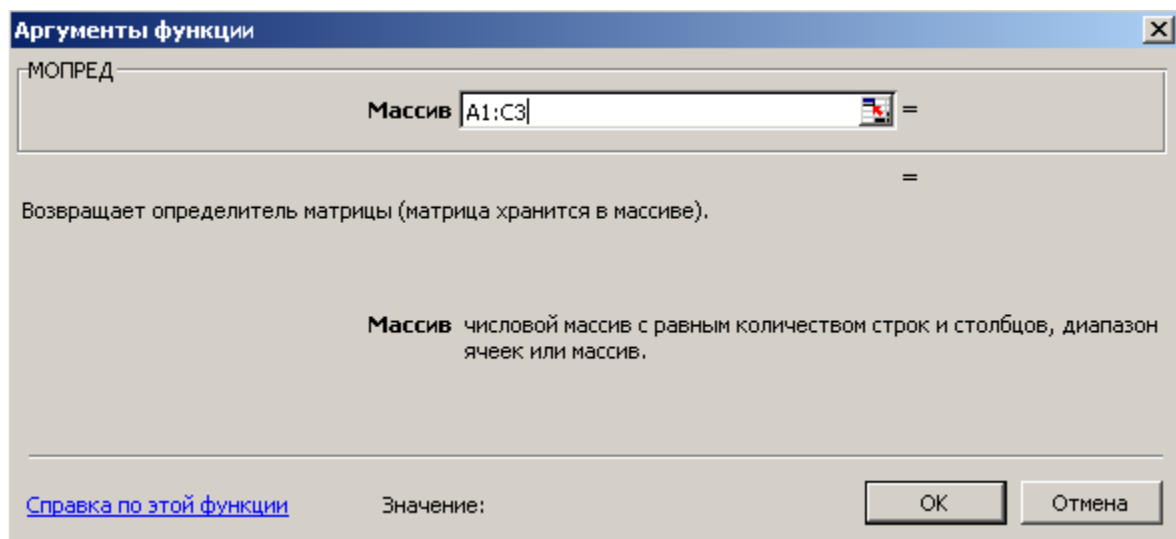
Для этого выполним следующие действия:

- | | A | B | C |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|
| а) Введем в диапазон ячеек A1: C3 элементы определителя Δ | a ₁₁ | a ₁₂ | a ₁₃ |
| б) Выделите любую ячейку для ответа, например D4 . | a ₂₁ | a ₂₂ | a ₂₃ |
| в) Нажмите на панели инструментов Стандартная кнопку f_x . | a ₃₁ | a ₃₂ | a ₃₃ |
- г) В появившемся диалоговом окне **Мастер функций** в рабочем поле **Категория** выберите **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**, а в рабочем поле функция – имя функции **МОПРЕД**. После этого щелкните по кнопке ОК.



д) Появившееся диалоговое окно мышью отодвиньте в сторону от определителя.

е) Введите **Массив A1: C3**, выделив его.



ж) Щелкните по кнопке ОК.

В результате в ячейке **D4** появится ответ.

2. Таким же способом вычислите вспомогательные определители Δx ; Δy ; Δz .

3. По формулам Крамера найдите x ; y ; z . $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

4. Запишите ответ: $(x; y; z)$.

После завершения практической работы сделать вывод о результатах.

Историческая справка

Габриель Крамер (1704 – 1752) – швейцарский математик. Установив и опубликовав в 1750г. Правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами, Крамер заложил основы теории определителей. Ему принадлежат также исследования алгебраических кривых высших порядков (исследование особых точек, ветвей и т. п.)

Пьер Симон Лаплас (1749 – 1827) – французский астроном, математик и физик. Научное наследие Лапласа относится к области небесной механики, математики и математической физики. Фундаментальными являются работы Лапласа по дифференциальным уравнениям, в частности по интегрированию методом «каскадов» уравнений с частными производными. Введенные Лапласом *шаровые функции* имеют разнообразные применения. В линейной алгебре Лапласу принадлежит важная теорема о разложении определителя по элементам некоторого ряда. Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввёл так называемые *производящие функции* и широко применял преобразование, носящее его имя. Теория вероятностей являлась основой для изучения всевозможных статистических закономерностей, в особенности в области естествознания.